D=3、4 共形場理論の最近の発展について

KEK/総研大　浜田賢二
http://research.kek.jp/people/hamada/

参考文献

• *Bounding Scalar Operator Dimensions in 4D CFT,*
R. Rattazzi, V. Rychkov, E. Tonni and A. Vichi, JHEP 0812 (2008) 031 [arXiv:0807.0004].

• *Solving the 3D Ising Model with Conformal Bootstrap,*
S. El-Showk, M. Paulos, D. Poland, S. Rychkov, D. Simmons-Duffin and A. Vichi, Phys. Rev. D86 (2012) 025022 [arXiv:1203.6064].

第一章
はじめに

Conformal Field Theory (CFT)

1. Critical theory of statistical model

For $T \neq T_c \quad \langle O(x)O(0)\rangle \sim e^{-|x|/\xi}$ (exponential damping)

At $T = T_c \quad \xi \to \infty \quad \langle O(x)O(0)\rangle = \dfrac{1}{|x|^{2\Delta}}$ (power-law damping)

Critical pointでconformal inv.が現れる

Critical theory = CFT $S_{\rm CFT}$ [In general, action is unknown]

Critical phenomena (=small perturbation from critical point)

$$S_{\rm CFT} \to S_{\rm CFT} + t\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Critical exponent}}}{a^{\Delta-D}} \int d^D x O(x) \qquad t = (T-T_c)/T_c \ (\ll 1)$$

(a is UV cutoff)

臨界現象の分類＝conformal field O の分類

(Ex. for $O=\varepsilon$, $ta^{\Delta_\varepsilon - D} = \xi^{\Delta_\varepsilon - D} \ (\xi = at^{-\nu})$ ➔ $\Delta_\varepsilon = D - 1/\nu$)

2. Background Free Quantum Gravity

Conformal invariance = gauge invariance (diff. inv.)

(cf. in usual CFT, vacuum is inv, but fields are variant)

- 2D Quantum gravity (Liouville gravity)

  Polyakov, KPZ, DK, David
- 4D Quantum gravity

  Riegert, Antoniadis-Mazur-Mottola, Hamada

BRST invariance ➔ physical state = ``primary (composite) scalar”

[tensor state is forbidden]

⇧

スケール不変なスカラーゆらぎしかない！

Primodial spectrum of the Universe

Hamada-Horata-Yukawa, PRD81(2010)083533

第二章
CFTの基礎

CFT (on Euclidean Space)

Generators: $P_\mu, M_{\mu\nu}, D, K_\mu$

Translation, Lorentz transf., Dilatation, Special conformal transf.

spacetime dim.

Conformal Algebra $SO(D+1,1)$

$$
\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] &= 0, \qquad [M_{\mu\nu}, P_\lambda] = -i\left(\delta_{\mu\lambda}P_\nu - \delta_{\nu\lambda}P_\mu\right), \\
[M_{\mu\nu}, M_{\lambda\sigma}] &= -i\left(\delta_{\mu\lambda}M_{\nu\sigma} + \delta_{\nu\sigma}M_{\mu\lambda} - \delta_{\mu\sigma}M_{\nu\lambda} - \delta_{\nu\lambda}M_{\mu\sigma}\right), \\
[D, P_\mu] &= -iP_\mu, \quad [D, M_{\mu\nu}] = 0, \quad [D, K_\mu] = iK_\mu, \\
[M_{\mu\nu}, K_\lambda] &= -i\left(\delta_{\mu\lambda}K_\nu - \delta_{\nu\lambda}K_\mu\right), \quad [K_\mu, K_\nu] = 0, \\
[K_\mu, P_\nu] &= 2i\left(\delta_{\mu\nu}D + M_{\mu\nu}\right)
\end{aligned}
$$

Hermiticity

$P_\mu^\dagger = K_\mu, \qquad D^\dagger = -D$ (注　Minkowskiとは異なる)

Primary fields

Spin *l* fields = symmetric traceless tensors $O_{\mu_1 \cdots \mu_l}$

Primary field conditions:

$$
\begin{aligned}
i\left[P_\mu, O_{\lambda_1 \cdots \lambda_l}(x)\right] &= \partial_\mu O_{\lambda_1 \cdots \lambda_l}(x), \\
i\left[M_{\mu\nu}, O_{\lambda_1 \cdots \lambda_l}(x)\right] &= \left(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu - i\Sigma_{\mu\nu}\right) O_{\lambda_1 \cdots \lambda_l}(x), \\
i\left[D, O_{\lambda_1 \cdots \lambda_l}(x)\right] &= \left(x_\mu \partial_\mu + \Delta\right) O_{\lambda_1 \cdots \lambda_l}(x), \\
i\left[K_\mu, O_{\lambda_1 \cdots \lambda_l}(x)\right] &= \left(x^2 \partial_\mu - 2x_\mu x_\nu \partial_\nu - 2\Delta x_\mu + 2i x_\nu \Sigma_{\mu\nu}\right) O_{\lambda_1 \cdots \lambda_l}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\Sigma_{\mu\nu} O_{\lambda_1 \cdots \lambda_l} = i \sum_{j=1}^{l} \left(\delta_{\mu\lambda_j}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\lambda_j}\delta_{\mu\sigma}\right) O_{\lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}\sigma\lambda_{j+1}\cdots\lambda_l}
$$

2-point function

$$
\langle O_{\mu_1 \cdots \mu_l}(x) O_{\nu_1 \cdots \nu_l}(0) \rangle = \frac{1}{|x|^{2\Delta}} \left[\frac{1}{l!}\left(I_{\mu_1\nu_1} \cdots I_{\mu_l\nu_l} + \text{perms}\right) - \text{traces}\right]
$$

$$
I_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - 2\frac{x_\mu x_\nu}{x^2}
$$

Positive sign by unitarity

Spin *l* primary states:

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu}|\Delta, l\rangle &= \Sigma_{\mu\nu}|\Delta, l\rangle, \\ iD|\Delta, l\rangle &= \Delta|\Delta, l\rangle, \\ K_\mu|\Delta, l\rangle &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $|\Delta, l\rangle = O_{\mu_1\cdots\mu_l}(0)|0\rangle$

Descendant states:

$$P_{\nu_1}\cdots P_{\nu_n}|\Delta, l\rangle$$

($\Leftrightarrow$ $\partial_{\nu_1}\cdots\partial_{\nu_n}O_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)$)

Unitarity bounds:

$$||P_{\nu_1}\cdots P_{\nu_n}|\Delta, l\rangle||^2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta \geq \dfrac{D}{2} - 1 & \text{for } l = 0, \\ \Delta \geq D - 2 + l & \text{for } l \geq 1 \end{cases}$$

$\uparrow$

spacetime dim.

Ferrara-Gatto-Grillo, PRD9(1974)3564,

G. Mack, CMP55(1977)1

2 & 3-Point Functions

2点、3点相関関数の形はconformal symmetryより以下のように決まる

2-point function (normalization)

$$I_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - 2\frac{x_\mu x_\nu}{x^2}$$

$$\langle \phi(x)\phi(0)\rangle = \frac{1}{|x|^{2d}}$$

$$\langle O_{\mu_1\cdots\mu_l}(x) O_{\nu_1\cdots\nu_l}(0)\rangle = \frac{1}{|x|^{2\Delta}}\left[\frac{1}{l!}\left(I_{\mu_1\nu_1}\cdots I_{\mu_l\nu_l} + \mathrm{perms}\right) - \mathrm{traces}\right]$$

Unitarity ➔ positive overall sign & unitarity bounds

3-point function

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2) O_{\mu_1\cdots\mu_l}(0)\rangle = \frac{f_{\Delta,l}}{|x_1 - x_2|^{2d-\Delta+l}|x_1|^{\Delta-l}|x_2|^{\Delta-l}}\left(Z_{\mu_1}\cdots Z_{\mu_l} - \mathrm{traces}\right)$$

$f_{\Delta,l}$: structure const.

$$Z_\mu = \frac{(x_1)_\mu}{x_1^2} - \frac{(x_2)_\mu}{x_2^2}$$

Unitarity ➔ $f_{\Delta,l}$ is real !

Operator Product Expansion

ここでは次の形のOPEを考える

$$\begin{aligned}\phi(x)\phi(y) &= \frac{1}{|x-y|^{2d}} + \sum_{l=2n} f_{\Delta,l}\left[\frac{(x-y)_{\mu_1}\cdots(x-y)_{\mu_l}}{|x-y|^{2d-\Delta+l}}O_{\mu_1\cdot\mu_l}(y) + \text{descendants}\right] \\ &= \frac{1}{|x-y|^{2d}} + \sum_{l=2n}\frac{f_{\Delta,l}}{|x-y|^{2d-\Delta}}C_{\Delta,l}(x-y,\partial_y)O_{\Delta,l}(y)\end{aligned}$$

$$O_{\Delta,l}(y) = O_{\mu_1\cdots\mu_l}$$

簡単のため *l*=0 の場合のみを与える

$$\langle\phi(x)\phi(y)O(z)\rangle = \frac{f_{\Delta,0}}{|x-y|^{2d-\Delta}}C_{\Delta,0}(x-y,\partial_y)\langle O(y)O(z)\rangle$$

$$\rightarrow\ C_{\Delta,0}(x-y,\partial_y)\frac{1}{|y-z|^{2\Delta}} = \frac{1}{|x-z|^{\Delta}|y-z|^{\Delta}}$$

Feynmanパラメータ積分で書き換える

$$\begin{aligned}C_{\Delta,0}(x-y,\partial_y) &= \frac{1}{B(\frac{\Delta}{2},\frac{\Delta}{2})}\int_0^1 dt[t(1-t)]^{\frac{\Delta}{2}-1} \\ &\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n n!}\frac{[t(1-t)a^2]^n}{(\Delta+1-D/2)_n}(\partial_y^2)^n e^{ta\cdot\partial_y}\Big|_{a=x-y}\end{aligned}$$

4-Point Functions (Conformal Blocks)

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\rangle = \frac{1}{|x_{12}|^{2d}|x_{34}|^{2d}}\left[1+\sum_{\Delta,l} p_{\Delta,l}\, g_{\Delta,l}(u,v)\right]$$

$$p_{\Delta,l} = f_{\Delta,l}^2 \qquad u = \frac{x_{12}^2 x_{34}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2}, \qquad v = \frac{x_{14}^2 x_{23}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2}$$

Conformal block for *l* = 0

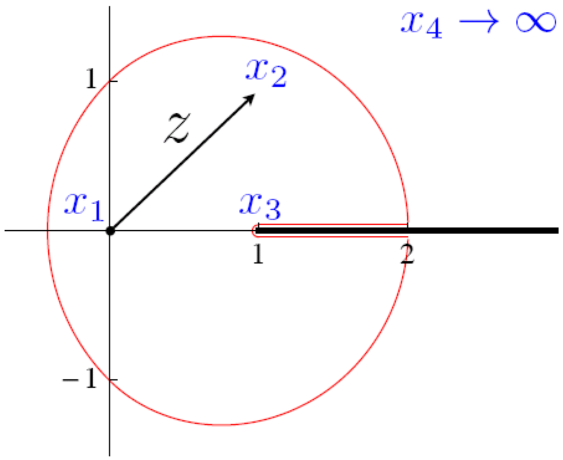
$$g_{\Delta,0}(u,v) = |x_{12}|^{\Delta}|x_{34}|^{\Delta} C_{\Delta,0}(x_{12},\partial_2) C_{\Delta,0}(x_{34},\partial_4) \frac{1}{|x_{24}|^{2\Delta}}$$

$$= u^{\frac{\Delta}{2}} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(\frac{\Delta}{2})_n (\frac{\Delta}{2})_n}{n!\ (\Delta+1-\frac{D}{2})_n} \frac{(\frac{\Delta}{2})_{n+m} (\frac{\Delta}{2})_{n+m}}{m!\ (\Delta)_{2n+m}} u^n (1-v)^m$$

double series (Appell function)

$l \neq 0$ の場合も同様に計算できる（漸化式を立てて計算 Dolan-Osborn 2001）

Dolan-Osborn NPB629(2001)459



New variables

$$u = z\bar{z}, \qquad v = (1-z)(1-\bar{z})$$

Gaussの超幾何級数

$$k_\beta(x) \equiv x^{\beta/2} {}_2F_1(\beta/2, \beta/2, \beta; x)$$

D=even ➔ conformal blockは超幾何級数の`積’で書ける!

D=4 $$g_{\Delta,l}(u,v)|_{D=4} = \frac{(-1)^l}{2^l}\frac{z\bar{z}}{z-\bar{z}}\left[k_{\Delta+l}(z)k_{\Delta-l-2}(\bar{z}) - (z \leftrightarrow \bar{z})\right]$$

D=2 $$g_{\Delta,l}(u,v)|_{D=2} = \frac{(-1)^l}{2^l}\left[k_{\Delta+l}(z)k_{\Delta-l}(\bar{z}) + (z \leftrightarrow \bar{z})\right]$$

$$(0 < z, \bar{z} < 1)$$

D=odd ➔ 一般式はまだ知られていない

D=3 $z = \bar{z}$ の時は超幾何級数を用いて書くことが出来る

第三章
Positivityの条件

Conformal blocksが求まったからといって、物理が理解できたわけではない。臨界現象、すなわち共形場、を分類するにはstructure constantの情報が必要である。

Positivity (=unitarity) Conditions

spin

2-point function ➔ conformal dim. of primary field $O_{\Delta,l}$

Unitarity bounds = $\begin{cases} \Delta \geq \dfrac{D}{2} - 1 & \text{for } l = 0, \\ \Delta \geq D - 2 + l & \text{for } l \geq 1 \end{cases}$ （等式はfree fieldの場合）

3-point function ➔ structure constant

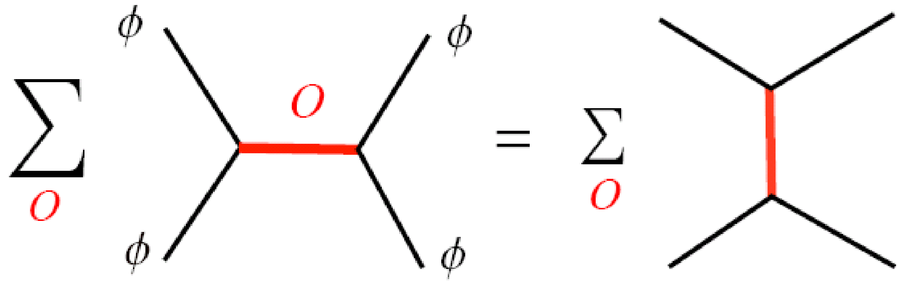
$f_{\Delta,l}$ is real

4-point function

$$\boxed{p_{\Delta,l} = f_{\Delta,l}^2 \geq 0}$$

この条件を新たに評価する！

Crossing symmetry



$$u^d - v^d = \sum_{\Delta,l} p_{\Delta,l} \left[v^d g_{\Delta,l}(u,v) - u^d g_{\Delta,l}(v,u) \right]$$

conformal blocks

From this relation,

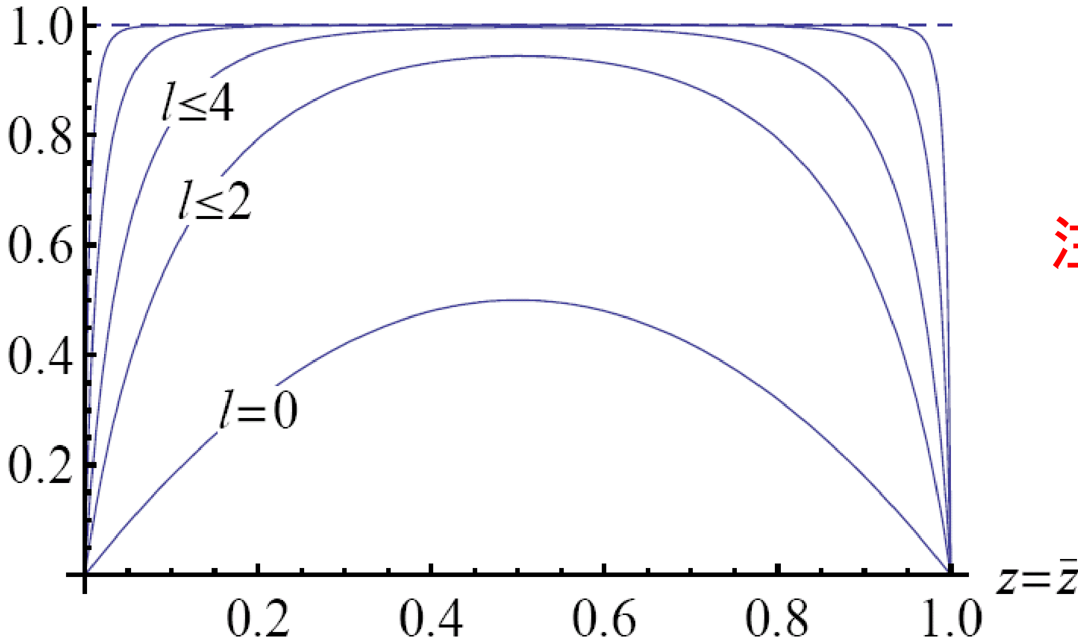
$$F_{d,\Delta,l}(z,\bar{z}) = \frac{v^d g_{\Delta,l}(u,v) - u^d g_{\Delta,l}(v,u)}{u^d - v^d}$$

$$\sum_{\Delta,l} p_{\Delta,l} F_{d,\Delta,l}(z,\bar{z}) = 1 \qquad\qquad u = z\bar{z}, \qquad v = (1-z)(1-\bar{z})$$

Ex : D=4 free scalar ϕ (conformal dim. $d=1$)

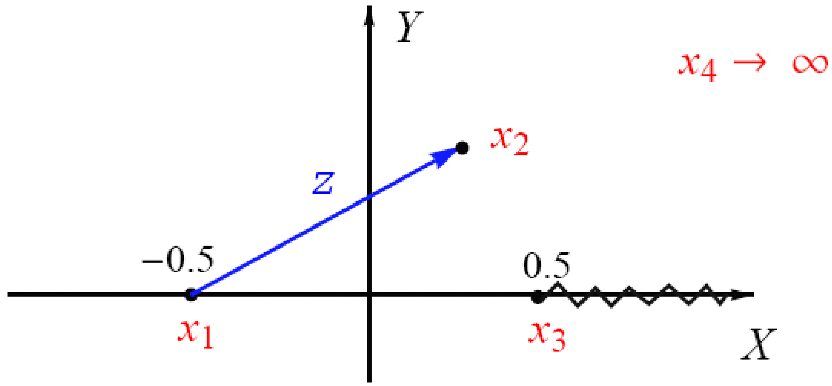
$$\phi \times \phi \Rightarrow O_{\Delta,l} \propto \phi \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_l} \phi + \cdots \quad (\Delta = l+2,\ l = \text{even})$$

Structure const.: $f_{\Delta,l} \propto \delta_{\Delta,l+2}\delta_{l,2n} \quad p_{l+2,l} = 2^{l+1}\dfrac{l!^2}{(2l)!}$



注）$z=\bar{z}=1/2$ の所の収束性が良い

check of eq. $\displaystyle\sum_{l=\text{even}} p_{l+2,l} F_{1,l+2,l}(z,\bar{z}) = 1$



$$z = \frac{1}{2} + X + iY, \quad \bar{z} = z^*$$

$$F(X,Y) = F(X,-Y) = F(-X,Y)$$

Consider following operation:

$$\Lambda[F] = \sum_{\substack{m,n \text{ even} \\ 2 \le m+n \le N}} \lambda_{m,n} \, \partial_X^m \partial_Y^n F|_{X=Y=0}$$

$z = \bar{z} = 1/2$ で値を評価する(収束性が良いと期待できるから)

Then, crossing symmetry means

$$\sum_{\Delta,l} p_{\Delta,l} \Lambda\left[F_{d,\Delta,l}\right] = 0$$

Primary scalar ϕ_d同士のOPE及びそのconformal blockを考える

$$\phi_d \times \phi_d \sim 1 + \sum_{\Delta \geq f} O_\Delta + \sum_{\substack{l>0 \\ l=\mathrm{even}}} \sum_{\Delta \geq D-2+l} O_{\Delta,l}$$

ここでは中間状態に現れるlowest scalar O_Δ のconformal dim. Δ にunitarity boundより強い制限を与える

Strategy

d を固定して f の値を変えて、このOPEがunitarity条件 $p_{\Delta,l} \geq 0$ と矛盾するかどうかをみる

ある f 以上で矛盾するならlowest scalarのΔの取り得る値は

$$\frac{D}{2} - 2 \leq \Delta \leq f$$ （上限が求まる）

Lowestが決まれば次はnext lowest scalar, higher spinへ

Positivityの判定条件

（ d, f は固定）

不等式で書かれた条件式の集合Bを考える

$$B = \{\Lambda\left[F_{d,\Delta,l}\right] \geq 0 \quad \text{for all } \Delta \geq f \ (l=0)$$
$$\text{and for all } \Delta \geq D-2+l \ (l>0)\}$$

この無限個の不等式系を満たす解（ $\lambda_{n,m}$ ）が存在するなら

有限個

[linear programmingの応用]

➔ $\sum_{\Delta,l} p_{\Delta,l}\Lambda\left[F_{d,\Delta,l}\right] \neq 0$ because $p_{\Delta,l} \geq 0$ （＊trivialな場合は除く）

➔ この d, f の組み合わせはpositivityを満たさない

➔ forbidden !

逆に、不等式を満たす解が無ければallowed !

（＊解の値そのものは必要ない）

Linear programming(線形計画法)

線形計画法(Linear Programing)の簡単な例 (変数が2つ、制限を課す不等式が5つの場合)

```
> with(Optimization):
> F1:=x+2*y: F2:=x+3*y+1: F3:=-2*x-y+2: F4:=2*x-3*y-3: F5:=-2*x-y+2:
```

ここでは、ある関数 F を5つの拘束条件B={ F1>=0, ..., F5>=0 }の下で極小化すること考える。

```
> B:={F1>=0, F2>=0, F3>=0,F4>=0,F5>=0};
```

$$B := \{0 \le x + 2\ y,\ 0 \le x + 3\ y + 1,\ 0 \le 2\ x - 3\ y - 3,\ 0 \le -2\ x - y + 2\}$$

```
> F:=x+y;  LPSolve(F,B);
```

$$F := x + y$$

$$[0.42857142857143,\ [x = 0.857142857142857094,\ y = -0.428571428571428380]]$$

注) 極小化すべき関数がない場合は定数と置けばよい. 例えば"F=0"を代入.
　　この結果は不等式系を満たす変数x,yが存在するかどうかの判定を与えていることになる.

最後の不等式を少し変形してみる.

```
> G5:=-2*x-y-2: B2:={F1>=0, F2>=0, F3>=0,F4>=0,G5>=0}; LPSolve(F,B2);
```

$$B2 := \{0 \le x + 2\ y,\ 0 \le x + 3\ y + 1,\ 0 \le 2\ x - 3\ y - 3,\ 0 \le -2\ x - y + 2,\ 0 \le -2\ x - y - 2\}$$

```
Error, (in Optimization:-LPSolve) no feasible solution found
```

Errorが出る。このときは不等式系を満たす解がない.

実際の計算

不等式系Bの有限化

$$B = \{\Lambda\left[F_{d,\Delta,l}\right] \geq 0 \qquad \text{for all } \Delta \geq f \ (l=0)$$
$$\qquad \text{and for all } \Delta \geq D-2+l \ (l>0)\}$$

$$\begin{cases} \text{上限:} & l \leq l_{\text{max}} \qquad \Delta \leq \Delta_{\text{max}} \text{ for all } l \\ \text{離散化:} & \Delta \to \Delta_j \ (\Delta_{j+1} = \Delta_j + \delta,\ \Delta_0 = D-2+l) \end{cases}$$

$$\delta = o(0.01) \qquad l_{\text{max}} = o(50) \qquad \Delta_{\text{max}} = o(50)$$

不等式の数　$o(10^4)$

未知数$\lambda_{n,m}$ の数　$N(N+6)/8 = o(100)$（Nが大きいほど制限が強い）

$$\Lambda[F] = \sum_{\substack{m,n \text{ even} \\ 2 \leq m+n \leq \underline{\underline{N}}}} \lambda_{m,n} \partial_X^m \partial_Y^n F|_{X=Y=0}$$

第四章
計算結果

$D=4$: lowest scalarの共形次元に制限を与える（あまり面白くない）

$D=2$: CFTの厳密解（2D Ising）と比較する

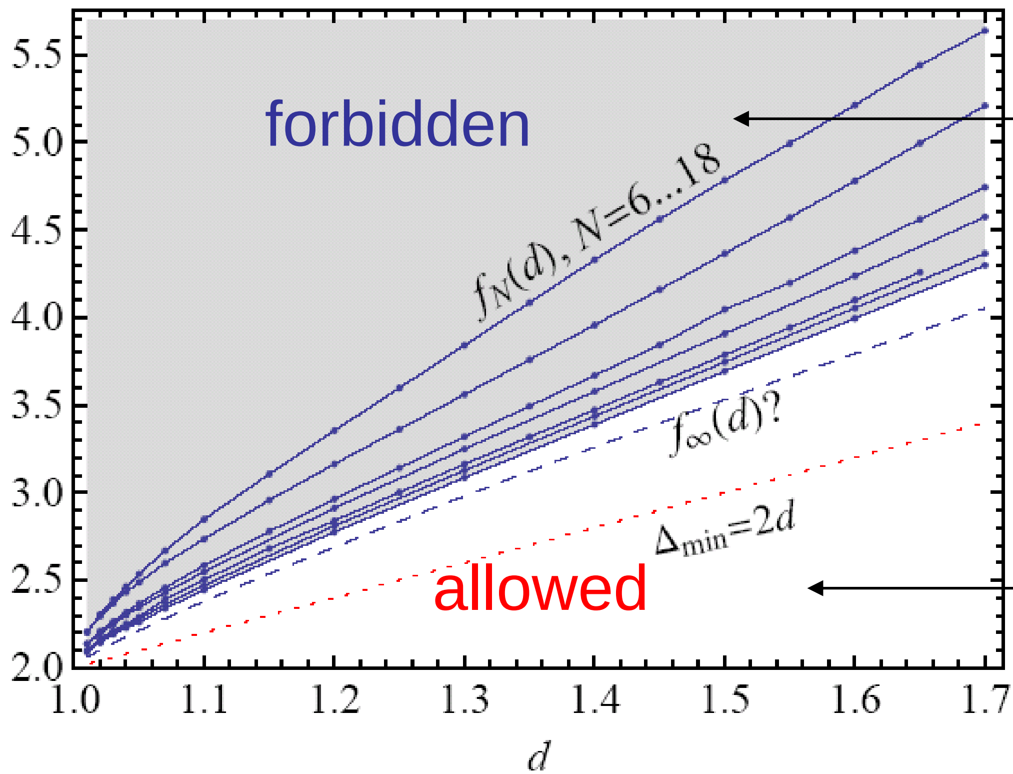
$D=3$: 3D Isingのcritical exponentsの計算

D=4 Results

Lowest scalarのconformal dim.の上限

$$\phi_d \times \phi_d = \mathbb{1} + O_\Delta + \ldots$$

$$\Delta \leq 2 + 0.7(d-1)^{1/2} + 2.1(d-1) + 0.43(d-1)^{3/2}$$



LP問題の解あり
➔positivityと矛盾

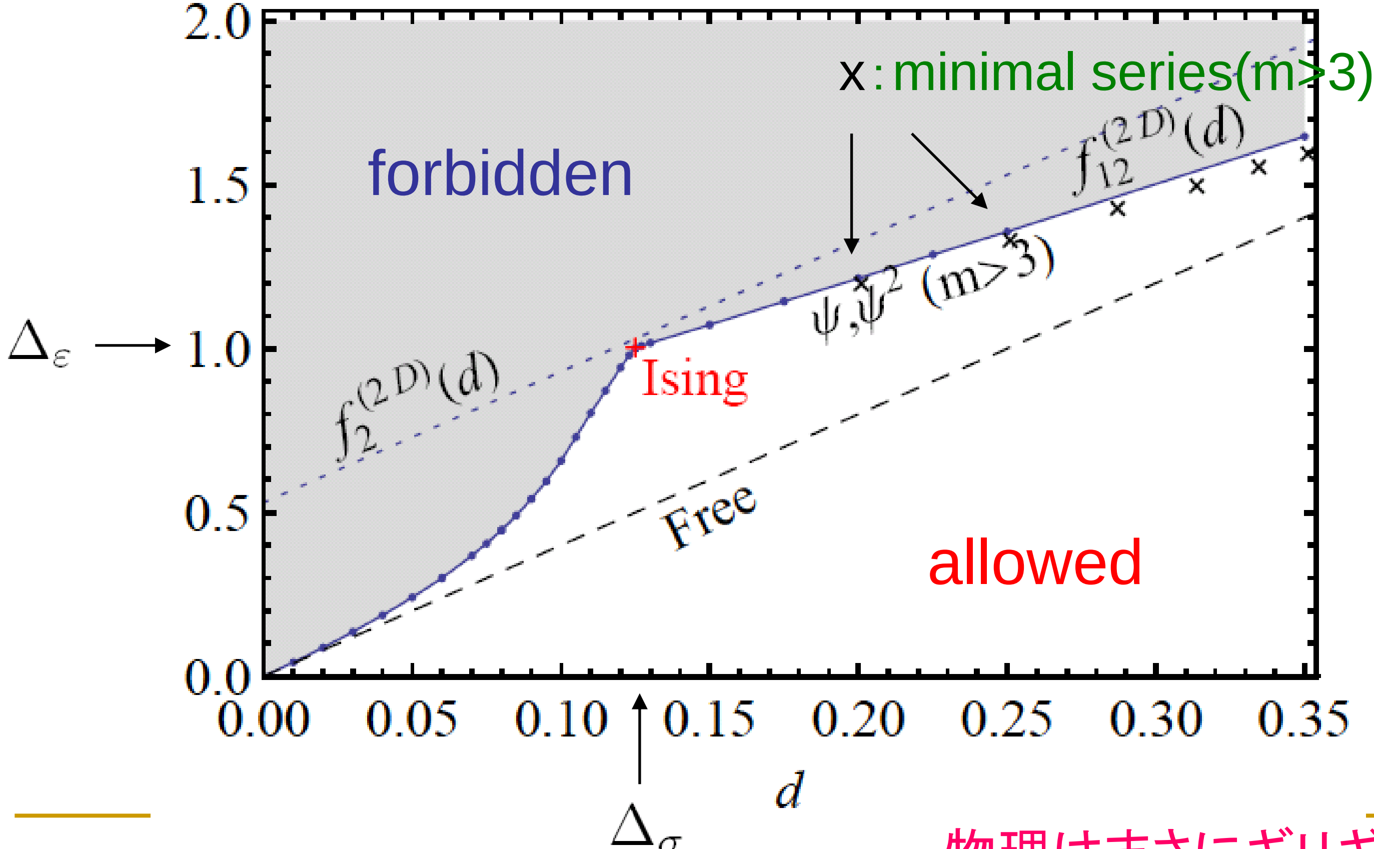
LP問題の解なし
➔positivityと矛盾しない

D=2 Results

2DCFT厳密解との比較 $\Delta_\sigma = 1/8 = 0.125, \quad \Delta_\varepsilon = 1$ (Ising)

$\sigma \times \sigma = 1 + \varepsilon$

Belavin-Polyakov-Zamolodchikov, NPB241(1984)333
Friedan-Qiu-Shenker, PRL52(1984)1575



$$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)}$$

$$\Delta_\sigma = \frac{1}{2} - \frac{3}{2(m+1)}$$

$$\Delta_\varepsilon = 2 - \frac{4}{m+1}$$

(m=3 Ising)

物理はまさにギリギリの所に現れる

Loest scalarのΔをallowed valueのmaxに固定して、next lowest scalarのΔ'に付いてのallowed regionを探す

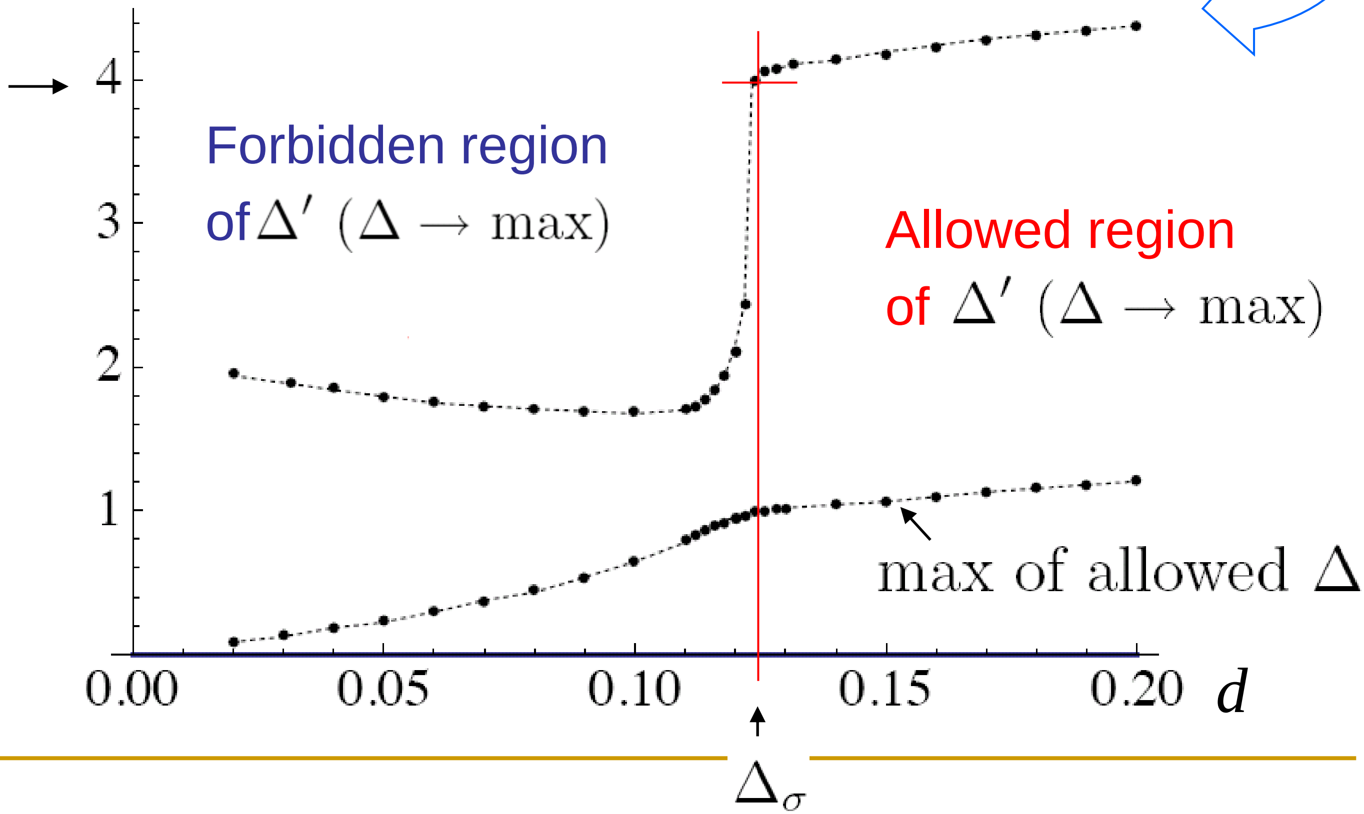
$$\phi_d \times \phi_d \sim 1 + \underset{\text{fix}}{O_\Delta} + \sum_{\Delta' \geq f} O_{\Delta'} + \sum_{\substack{l>0 \\ l=\text{even}}} \sum_{\Delta \geq D-2+l} O_{\Delta,l}$$

2D Ising

$\Delta_{\varepsilon'} = 4$

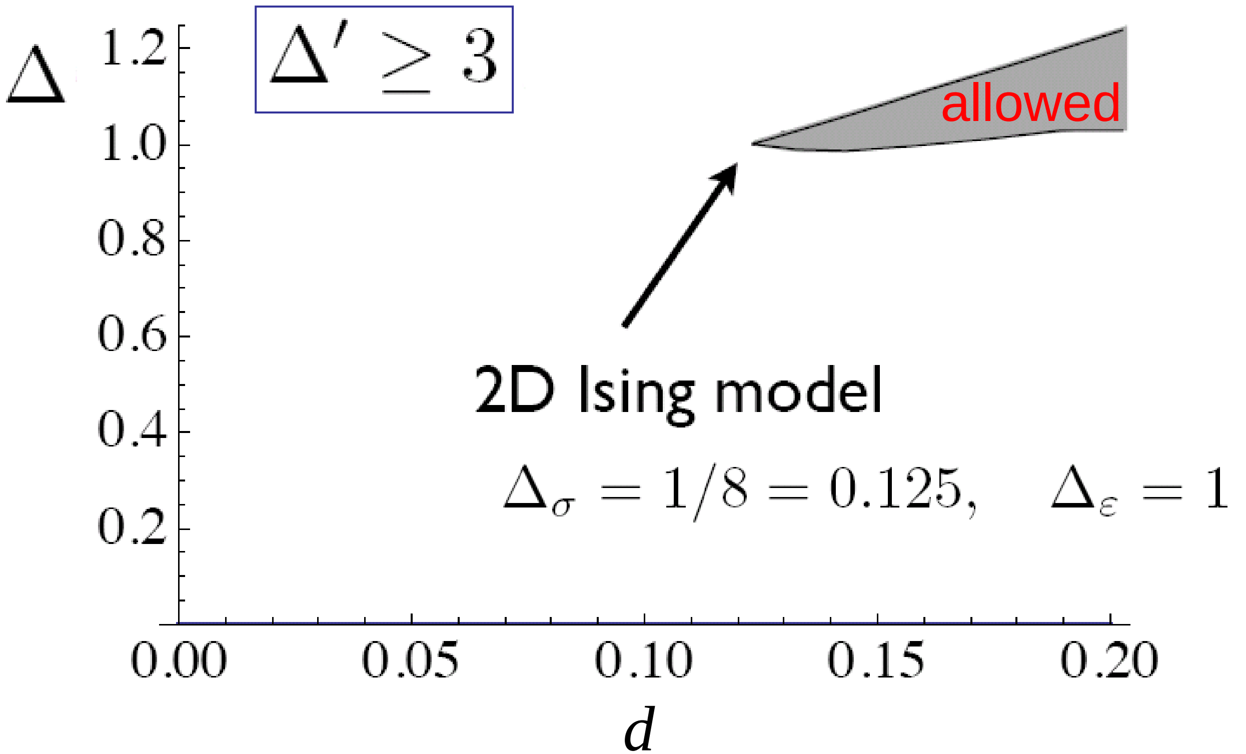
$\varepsilon' = L_{-2}\bar{L}_{-2} \cdot \mathbf{1}$

(irrelevant op.)



この計算はLowest Δ とnext Δ' の間にgapがあることを想定している

そこで、$\Delta' \geq 3$ の制限を課して再度lowest scalar Δ のallowed regionを探す

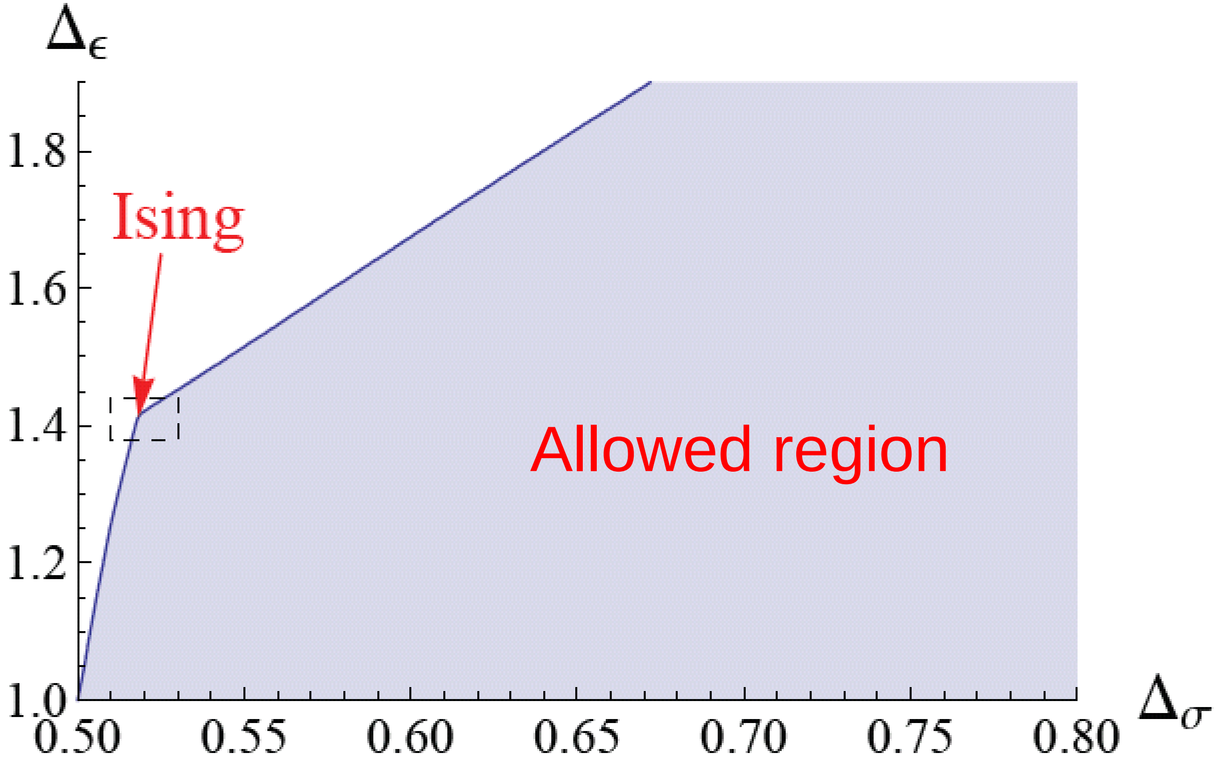


D=3 Results

同様の計算をD=3で行うと

3D Ising $\Delta_\sigma = 0.5182(3), \quad \Delta_\varepsilon = 1.413(1)$

(Lattice Monte-Carlo simulation)



次に、lowest scalar Δ_ε とnext lowest scalar $\Delta_{\varepsilon'}$ の間にgapがあることを考慮に入れて計算する

これに注目 →

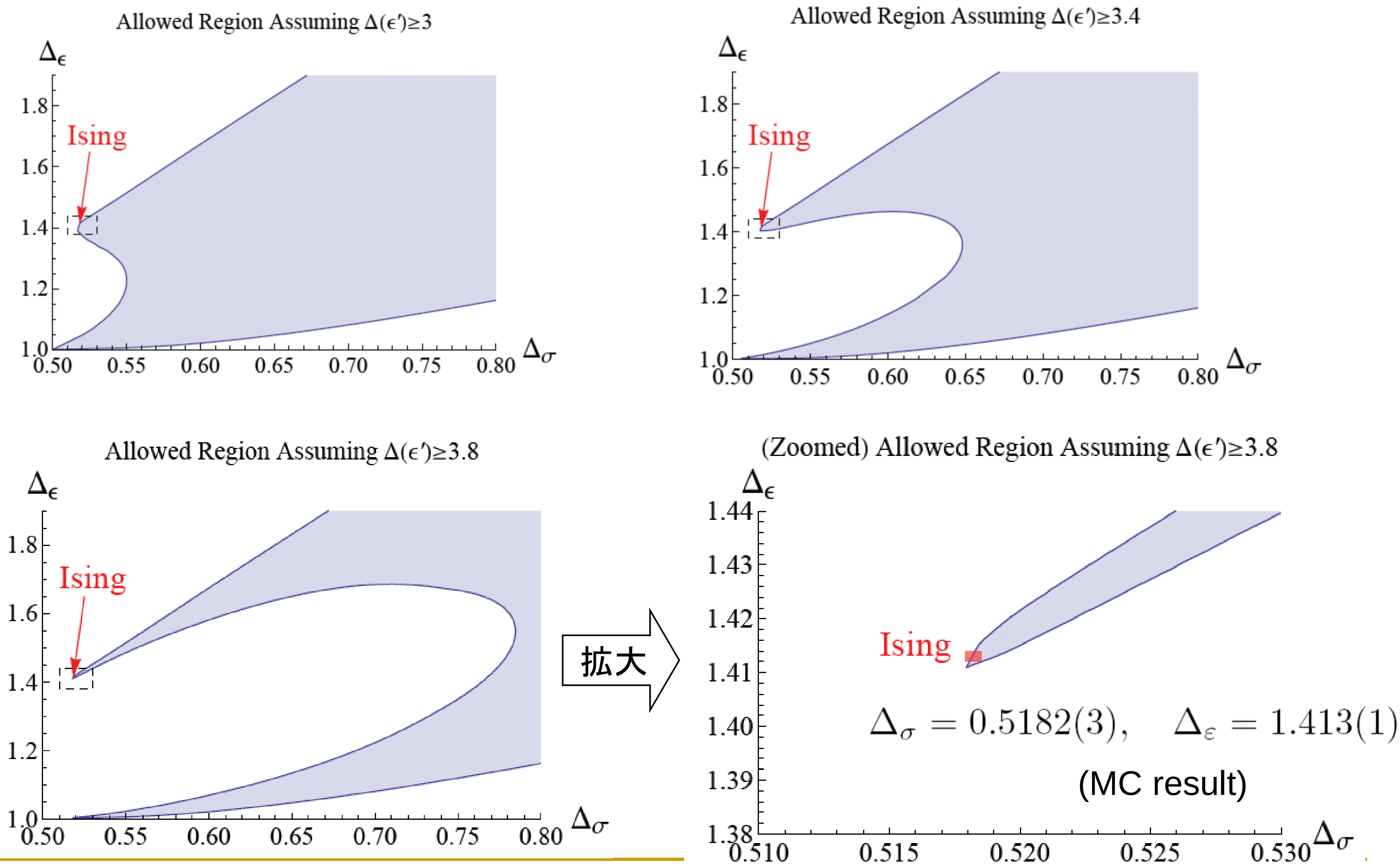
Operator	Spin l	$\mathbb{Z}_2$	Δ	Exponent
σ	0	$-$	0.5182(3)	$\Delta = 1/2 + \eta/2$
σ'	0	$-$	$\gtrsim 4.5$	$\Delta = 3 + \omega_A$
ε	0	$+$	1.413(1)	$\Delta = 3 - 1/\nu$
ε'	0	$+$	3.84(4)	$\Delta = 3 + \omega$
ε''	0	$+$	4.67(11)	$\Delta = 3 + \omega_2$
$T_{\mu\nu}$	2	$+$	3	n/a
$C_{\mu\nu\kappa\lambda}$	4	$+$	5.0208(12)	$\Delta = 3 + \omega_{\rm NR}$

Lattice Monte-Carlo simulation

$$\begin{aligned} \sigma \times \sigma \quad = \quad & 1 + (\varepsilon + \varepsilon' + \cdots) \\ & + (T_{\mu\nu} + \cdots) \\ & + (C_{\mu\nu\lambda\sigma} + \cdots) \\ & + \cdots \end{aligned}$$

$$\sigma \times \varepsilon = \sigma + \sigma' + \cdots$$

Next lowestに制限（$\Delta_{\epsilon'} \geq 3,\ 3.4,\ 3.8$）を加えて$(\Delta_\sigma, \Delta_\varepsilon)$のallowed regionを計算



最終章
まとめ

- D>2のconformal blocksの解析的な一般式の発見(2001)
- Unitarity条件(structure constantが実数)を課すと
  共形次元に制限が付く
- (準)解析的な方法で3D Isingモデルの臨界指数を調べた

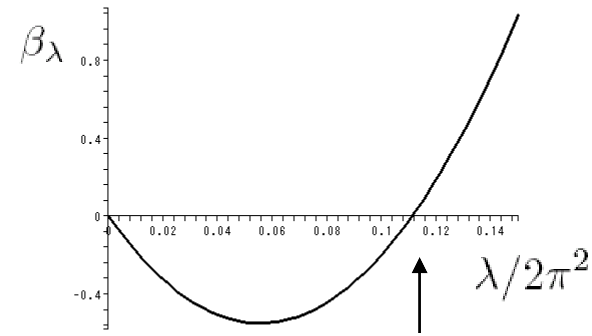
$$\Delta_\sigma = 0.5182(3), \quad \Delta_\varepsilon = 1.413(1)$$

これまでの場の理論的方法との比較

Wilson-Fisher 1972 (εexpansion)

$$S = \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \lambda\phi^4 \right] \qquad D = 4 - \epsilon$$

$$\beta_\lambda = -\epsilon\lambda + 9\lambda^2/2\pi^2$$



$$\lambda^*/2\pi^2 \simeq \epsilon/9 \ll 1$$

At fixed point $\epsilon \to 1$ $(D \to 3)$

$$\begin{cases} \Delta_\phi = (1 - \epsilon/2) + \epsilon^2/108 \to 0.51 \\ \Delta_{\phi^2} = (2 - \epsilon) + \epsilon/3 \to 1.33 \end{cases}$$

$$\phi \times \phi \sim \phi^2$$

σ ε

良く合うけれど、正しさに疑問がある！

$$(\Delta_\phi = 0.5180, \ \Delta_{\phi^2} = 1.4102 \text{ at } o(\epsilon^5))$$

CFTの発展

1. 1909 Cunningham, Bateman： conformal inv. を物理に導入

2. 1970 Polyakov： conformal inv.がcritical pointで現れることを指摘
3. 1973 Ferrara, Grillo, Gatto： conformal bootstrapの始まり

4. 1984 Belavin, Polyakov, Zamolodchikov： D=2 CFTの厳密解

5. 2001 Dolan, Osborn： conformal blocksの一般形の発見

今日紹介した仕事:

D>2の臨界指数がCFTから推察された最初の例！

付録

Hermite性（Euclid CFT)

(cf. $O^{\dagger}_{\mu_1\cdots\mu_l}(x) = O_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)$ on Minkowski)

$$O^{\dagger}_{\mu_1\cdots\mu_l}(x) = \frac{1}{(x^2)^{\Delta}} I_{\mu_1\nu_1}\cdots I_{\mu_l\nu_l} O_{\nu_1\cdots\nu_l}(Rx)$$

Inversion: $x_\mu \to Rx_\mu = \dfrac{x_\mu}{x^2}$ $\qquad I_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - 2\dfrac{x_\mu x_\nu}{x^2}$

Out-state

$$\begin{aligned} \langle\{\mu_1\cdots\mu_l\},\Delta| &= \langle 0|O^{\dagger}_{\mu_1\cdots\mu_l}(0) \\ &= \lim_{y^2\to\infty}(y^2)^{\Delta} I_{\mu_1\nu_1}\cdots I_{\mu_l\nu_l}\langle 0|O_{\nu_1\cdots\nu_l}(y) \end{aligned}$$

$$\langle\{\mu_1\cdots\mu_l\},\Delta|P_\mu = 0 \qquad K_\mu|\{\mu_1\cdots\mu_l\},\Delta\rangle = 0$$

$$P^{\dagger}_{\mu} = K_\mu$$

2-point function

$$\langle O(x)O(x')\rangle = \frac{1}{(x^2)^\Delta}\langle O^\dagger(Rx)O(x')\rangle = \frac{1}{(x^2)^\Delta}\langle\Delta|e^{-iK_\mu(Rx)_\mu}e^{iP_\nu x'_\nu}|\Delta\rangle$$

where

$$O(x) = e^{iP_\mu x_\mu}O(0)e^{-iP_\mu x_\mu} \qquad O^\dagger(x) = e^{iK_\mu x_\mu}O(\infty)e^{-iK_\mu x_\mu}$$

$$P_\mu^\dagger = K_\mu \quad \langle\Delta| = \langle 0|O(\infty) \qquad |\Delta\rangle = O(0)|0\rangle$$

From this,

$$\langle O(x)O(x')\rangle = \frac{1}{(x^2)^\Delta}\sum_{n=0}^{\infty} C_n^\Delta\left(\frac{x\cdot x'}{\sqrt{x^2x'^2}}\right)\left(\frac{x'^2}{x^2}\right)^{n/2} = \frac{1}{(x-x')^{2\Delta}}$$

Gegenbauer polynomial

$$C_n^\Delta = \frac{1}{(n!)^2}\frac{x_{\mu_1}\cdots x_{\mu_n}x'_{\nu_1}\cdots x'_{\nu_n}}{(x^2x'^2)^{n/2}}\langle\Delta|K_{\mu_1}\cdots K_{\mu_n}P_{\nu_1}\cdots P_{\nu_n}|\Delta\rangle$$

$$nC_n^\Delta = 2(\Delta+n-1)zC_{n-1}^\Delta - (2\Delta+n-2)C_{n-2}^\Delta$$

$$z = x\cdot x'/\sqrt{x^2x'^2} \qquad \frac{1}{(1-2zt+t^2)^\Delta} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\Delta(z)t^n$$